CHAPITRE 2
Théorie des ensembles

Introduction

Ce chapitre est consacré aux notions élémentaires et aux concepts généraux de la théorie des ensembles, dont on a besoin pour une introduction moderne à la théorie du calcul des probabilités.

ENSEMBLES, ELEMENTS

On appelle ensemble toute liste ou toute collection d'objets bien définis; on appelle éléments ou membres de l'ensemble les objets appartenant à l'ensemble. On écrit

$$p \in A \text{ si } p \text{ est un élément de l'ensemble A}$$

Si chaque élément de A apprtient aussi à un ensemble B, c'est -à-dire si $p \in A$ implique $p \in B$,

On dit alors que A est un sous-ensemble de B, ou que A esy contenu dans B ;ce qu'on écrit

$$A \subset B$$

Deux ensembles sont identiques si chacun d'eux est contenu dans l'autre, et l'on écrit

$$A = B \text{ si et seulelent si A} \subset B \text{ et B} \subset \text{A}$$

On particularise un ensemble donné soit en dénombrant ses éléments, soit en établissant des propriétés caractérisant ses éléments. Par exemple,

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$

signifie que A est l'ensemble constitué des nombres 1, 3, 5, 7 et 9; et

$$B = \{x : x \, est \, un \, nombre \; premier, x \in< 15\}$$

signifie que B est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 15.

On suppose que tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles d'un certain ensemble qu'on appelle l'ensemble universel, et que l'on désigne par Ω. On utilise également la notation $\varnothing$ pour désigner l'ensemble vide ou nul c.à.d. l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Exemple 2.1: *Les ensembles A et B considérés ci- dessus peuvent également être écrits sous la forme*

$$A = \{x : x \; est \, un \, nombre \, impair, x < 10\} \; et \; B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

Observons que 9 $\in$ A mais que 9 $\notin$ B, et que 11 $\in$ B, mais que 11 $\notin$ A; par contre 3 $\in$ B, et 6 $\notin$ B.

Exemple 2.2: *On utilise les symboles spéciaux suvants:*

$$N = l'\,enseble\,des\,entiers\ positifs : 1, 2, 3, ...$$
$$Z = l'\,ensemble\,des\,entiers : ...., -2, -1, 0, 1, 2, ...$$
$$R = l'\,ensemble\,des\,nombres\,réels.$$

De sorte que $N \subset Z \subset R$.

Exemple 2.3: *Les intervalles de la droite réelle, définis ci dessous, interviennent très souvent en mathématiques. a et b sont des nombres réels tels que a<b. L'intervalle allant de a à b peut être un:*

Intervalle ouvert: $]a,b[= \{x : a < x < b\}$

Intervalle fermé: $[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$

Intervalle sem-ouvert à gauche: $]a,b] = \{x : a < x \le b\}$

Intervalle sem-ouvert à droite: $[a,b[= \{x : a \le x < b\}$

Exemple 2.4: *Dans les études de population humaine, l'ensemble universel est constitué par tous les habitans de la terre.*

Exemple 2.5: Soit $C = \{x : x^2 = 4, x\,est\,impair\}.\,Alors\,C = \emptyset; C\,est\,donc\,l'\,ensemble\,vide.$

Théorème2.1: *Soit A,B et C des ensembles quelquonques. Alors :)*

$(i) A \subset A; (ii)\ si\ A \subset B\,et\,B \subset A, alors\ A = B;\ et\ (iii)\ si\ A \subset B\,et\,B \subset C\ alors\ A \subset C.$

$Soulignons\,que\,A \subset B\,n'exclut\ pas\,la\ possibilité\,d'avoir\ A = B.$

OPERATION SUR LES ENSEMBLES

Soit A et B deux ensembles. La réunion de A et B que l'on désigne par $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B:

$$A \cup B = \{x : x \in A\,ou\,x \in B\}$$

L'intersection de A et de B que l'on désigne par $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B:

$$A \cap B = \{x : x \in A\,et\,x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c.à.d. si A et B n'ont aucun élément en commun, on dit alors que A et B sont disjoints.

La différence entre A et B ou le complémentaire relatif de B par rapport à A que l'on note $\eth_A^B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennet à A mais pas à B:

$$\eth_A^B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$$

Remarquons que $\eth_A^B$ et B sont des ensembles disjoints, c.à.d. que $\eth_A^B \cap B = \emptyset$.

Le complémentaire absolu, ou plus simplement le complémentaire de A que l'on désigne par $\eth^A$ est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A:

$$\eth^A = \{x :\ x \in \Omega,\ x \notin A\}$$

Cela signifie que $\eth^A$ est la différence entre l'ensemble universel Ω et A .

Exemple 2.6: *Soit A={1,2,3,4} et B={3,4,5,6} avec U={1,2,3,......} Alors*

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \quad A \cap B = \{3,4\}$$

$$\eth_A^B = \{1,2\} \qquad \eth_A = \{5,6,7,........\}$$

Les ensembles sur lesquels on effectue les opérations précedentes satisfont des lois ou identités divers que l'on peut réumer dans le tableau suivant

LOIS DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES	
Loi idempotente	
1a. $A \cup B$	1b. $A \cap B$
Loi associative	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Loi commutative	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b . $A \cap B = B \cap A$
Loi de distributivité	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5a. $A \cup \varnothing = A$	5b. $A \cap \Omega = A$
6a. $A \cup \Omega = \Omega$	6b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
Loi de complémentarité	
7a. $A \cup \eth_A = \Omega$	7b $A \cap \eth_A = \varnothing$
8a. $\eth\eth_A = A$	8b. $\eth_\Omega = \varnothing, \eth_\varnothing = \Omega$
Loi de De Morgan	
9a. $\eth_{(A \cup B)} = \eth_A \cap \eth_B$	9b. $\eth(A \cap B) = \eth_A \cup \eth_B$

Théorème 2.2: Chacune des conditions suivantes est équivalente à $A \subset B$ **:**

(i) $A \cap B = A$ $\qquad (iii)$ $\eth_B \subset \eth_A$ $\qquad (v)$ $B \cup \eth_A = \Omega$

(ii) $A \cup B = B$ $\qquad (iv)$ $A \cap \eth_B = \varnothing$ **.**

ENSEMBLES FINIS ET ENSEMBLES DENOBRABLES

Un ensemble peut être fini ou infini. Un ensemble est fini s'il est vide ou s'il contient exactement n éléments, n étant un entier positif. Dans le cas contraire, l'ensemble est infini.

Exemple 2.7: *Soit* M *l'ensemble des jours de la semaine, c'est-à-dire*

$M = \{Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudu, Vendredi, Samedi, Dimanche\}$

Alors M *est fini.*

Exemple 2.8*: Soit* P *={x: x est une rivière de la Terre}. Bien qu'il soit difficile de compter le nombre de rivières qui coulent sur la Terre,* P *est un ensemble fini.*

Exemple 2.9: *Soit Y l'ensemble des nombres entiers positifs pairs, c.à.d.* $Y = \{2, 4, 6, ...\}$. *Alors Y est un ensemble infini.*

Exemple 2.10: *Soit I l'intervalle unité de la droite réelle, c.à.d.* $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. *Alors I est aussi un ensemble infini.*

Un ensemble est dénombrable s'il est fini ou si l'on peut ranger ses éléments sous la forme d'une suite. On dit dans ce cas qu'il est infini et dénombrable. Dans le cas contraire, l'ensemble est non dénombrable. L'ensemble de l'exemple 2.9 est infini et dénombrable , mais l'on peut montrer que l'ensemble de l'exemple 2.10 est non dénombrable.

ENSEMBLES PRODUITS

Soit A et B deux ensembles. L'ensemble produits de A et de B, que l'on écrit $A \times B$, est constitué de tous les couples ordonnées (a,b) où $a \in A et b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

On désigne par A^2 le produit $A \times A$ d'un ensemble A par lui même

Exemple 2.11: *Soit* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{a, b\}$. *Alors*

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

On étend d'une façon naturelle le concept d'ensemble produit à un nombre fini d'ensembles.

L'ensemble produit des ensembles $A_1, A_2, ..., A_m$, que l'on écrit $A_1 \times A_2 \times .... \times A_m$, est l'ensemble de tous les m-uples ordonnées $(a_1, a_2, ..., a_n)$ où $a_i \in A_i$ pour tout i .

EXERCICES

1) Montrer que C_B A = B ∩ CA

v 2) Soit M={ Tom, Marc, Eric} et W={André, Betty}. Déterminer M x W

3) **Soit A={a, b}, B={2,3} et D={3,4}. Déterminer :**

Ax(BUD), (AxB)U(AxD), Ax(B∩D), (AxB)∩(AxD)